Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 1

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 3\omega t \cos 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/2 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^2$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 4\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $2k$, а со второй – пружинкой жесткости $3k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $3k$, а со второй $2k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $4k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/7$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида αx^2, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 2

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \cos 5\omega t \cos 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $4k$, а со второй – пружинкой жесткости $3k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $3k$, а со второй $4k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $4k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $4\omega_0/5$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида αx^3, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 3

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 3\omega t \sin 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^5$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^3/\tau^3 + F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 4\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $3k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $3k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $5k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/8$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида αx^2, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 4

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \sin 5\omega t \cos 6\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 4\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости k, а со второй – пружинкой жесткости $3k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $3k$, а со второй k. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $6k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/10$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида αx^3, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 5

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \sin 2\omega t \cos 3\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/2 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^4$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 8\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $2k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $2k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости k. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $4\omega_0/7$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида αx^2, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 6

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \cos 3\omega t \sin 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/4 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^4$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0 \tau = 8\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости k, а со второй – пружинкой жесткости $4k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $4k$, а со второй k. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $4k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $4\omega_0/5$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида αx^3, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 7

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \sin 3\omega t \sin 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos\omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $4k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $4k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости k. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $\omega_0/17$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^2$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 8

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 7\omega t \cos 8\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/2 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^2$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^4/\tau^4$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $2k$, а со второй – пружинкой жесткости $3k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $3k$, а со второй $2k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $4k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/8$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 9

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 7\omega t \cos 8\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $2k$, а со второй – пружинкой жесткости $6k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $6k$, а со второй $2k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости k. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $4\omega_0/9$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида αx^2, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 10

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \sin 6\omega t \cos 7\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos\omega t$, где $\omega = \omega_0/4 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^4$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 8\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости k, а со второй – пружинкой жесткости $3k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $3k$, а со второй k. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $3k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/8$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 11

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 7\omega t \cos 8\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 8\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $2k$, а со второй – пружинкой жесткости $3k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $3k$, а со второй $2k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $4k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/8$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 12

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \sin 2\omega t \sin 3\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/2 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^2$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 4\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $4k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $4k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $2k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/5$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^2$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 13

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 4\omega t \sin 5\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 8\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $3k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $3k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости k. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $5\omega_0/6$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 14

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 3\omega t \sin 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos\omega t$, где $\omega = \omega_0/4 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^4$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $5k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $5k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $2k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $8\omega_0/9$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 15

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \sin 3\omega t \cos 2\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $3k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $3k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $2k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $5\omega_0/8$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида αx^2, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 16

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 3\omega t \sin 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos\omega t$, где $\omega = \omega_0/2 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^2$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $7k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $7k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости k. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/5$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 17

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \sin 3\omega t \sin 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 8\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $3k$, а со второй – пружинкой жесткости $2k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $2k$, а со второй $3k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $2k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/4$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^2$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 18

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \cos 4\omega t \cos 3\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos\omega t$, где $\omega = \omega_0/4 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^4$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $4k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $4k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $2k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $5\omega_0/6$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 19

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 3\omega t \sin 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos\omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 4\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $3k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $3k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $5k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $7\omega_0/6$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^2$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 20

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 5\omega t \cos 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = -F_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/2 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^2$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^3/\tau^3$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $3k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $3k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $2k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $5\omega_0/4$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^2$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 21

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \sin 4\omega t \sin 5\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = -F_0 \cos(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/4 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^4$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^4/\tau^4$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 8\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $2k$, а со второй – пружинкой жесткости $3k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $3k$, а со второй $2k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости k. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/7$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 22

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \cos 3\omega t \sin 4\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = -F_0 \sin(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \ll \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости k, а со второй – пружинкой жесткости $2k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $2k$, а со второй k. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $4k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $3\omega_0/4$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^2$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 23

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = F_0 \cos 7\omega t \sin 8\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = -F_0 \sin(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/2 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^2$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0 \tau = 4\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $3k$, а со второй – пружинкой жесткости $3k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $3k$, а со второй $3k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости k. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $5\omega_0/8$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 24

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \sin 4\omega t \sin 5\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 + \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$, где $\omega = \omega_0/3 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^3$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = -F_0 t_1^2/\tau^2$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 6\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $5k$, а со второй – пружинкой жесткости $2k$, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой $2k$, а со второй $5k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $2k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A \cos \omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \sin \omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $4\omega_0/9$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^2$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f \sin \omega t$.

Домашнее задание №20

Резонансные явления

Вариант 25

1. Рассмотрим резонанс в линейных вынужденных колебаниях в отсутствие трения. Пусть на осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует сила $F(t) = -F_0 \cos\omega t \sin 2\omega t$. Найдите вынужденные колебания осциллятора, если в начальный момент он покоился. Перейдите в ответе к пределу $\omega \to \omega_0$. Изобразите графически получившуюся зависимость.

2. Трение в системе приводит к тому, что амплитуда линейных вынужденных колебаний в резонансных условиях не растет неограниченно. Найдите колебания осциллятора массой m с собственной частотой ω_0, на который действует внешняя сила $F(t) = -F_0 \sin(\omega_0 - \varepsilon)t$ и сила трения $-2m\gamma\dot{x}$, причем $\gamma \gg \varepsilon$ и $\gamma, \varepsilon \ll \omega_0$. Перейдите к пределу $\gamma, \varepsilon \to 0$. Постройте зависимость амплитуды установившихся колебаний от отстройки частоты ε.

3. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания системы с трением из предыдущей задачи. Изобразите зависимость разницы фаз колебаний и вынуждающей силы от отстройки частоты ε. Получите асимптотику этой зависимости при малых ε.

4. Теперь рассмотрим нелинейный резонанс в отсутствие трения. В отличие от линейного случая, в нелинейной системе резонанс возможен не только на собственной частоте за счет эффекта генерации старших гармоник. На осциллятор массой m с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos\omega t$, где $\omega = \omega_0/4 + \varepsilon$. Нелинейное слагаемое в уравнении движения имеет вид $\alpha m x^4$. Найдите и постройте схематически зависимость амплитуды установившихся колебаний (на частоте ω_0) от отстройки частоты ε при $\varepsilon \lesssim \omega_0$.

5. На линейный осциллятор без трения (масса m, собственная частота ω_0) действует сила $F(t) = -F_0 t_1/\tau$, где $t_1 = t - n\tau$, при $n\tau < t < (n+1)\tau$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта сила периодична, а в ее спектре содержатся все кратные гармоники. Поэтому резонанс наблюдается не только на частоте $2\pi/\tau = \omega_0$. Найдите вынужденные колебания при $\omega_0\tau = 4\pi$ и вблизи этой частоты.

6. Рассмотрим теперь резонанс в системах с несколькими степенями свободы. Два грузика массой m могут двигаться между двумя стенками. Первый грузик связан с первой стенкой пужинкой жесткости $2k$, а со второй – пружинкой жесткости k, второй грузик наоборот, с первой стенкой связан пружинкой k, а со второй $2k$. Оба грузика связаны друг с другом пружиной жесткости $6k$. Найдите собственный частоты ω_1 и ω_2 системы. Пусть теперь обе стенки приводятся в движение по законам $x_1(t) = -x_2(t) = A\cos\omega t$. Постройте зависимость амплитуды вынужденных колебаний грузиков от частоты вынуждающей силы. На скольких частотах наблюдается резонанс? Что изменится, если приводить в движение только одну стенку?

7. Параметрический резонанс возникает в системах с периодически изменяющимися извне параметрами (например, собственной частотой). Рассмотрим уравнение Матьё $\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\sin\omega t)x = 0$ с малой амплитудой изменения частоты, $h \ll 1$. Резонанс в такой системе интенсивнее всего возникает на частоте $\omega = 2\omega_0$. При этом оказывается, что на гармониках $\omega = 2\omega_0/n$ тоже наблюдается резонанс. Найдите границы параметрического резонанса на частоте $\omega = \omega_0$, т.е. интервал частот вблизи ω_0, в пределах которого амплитуда колебаний будет возрастать со временем. Изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости. Докажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ ширина частотного интервала пропорциональна h^n. Будет ли резонанс на частоте $5\omega_0/7$?

8. При наличия трения в системе параметрический резонанс возникает не при любых значениях амплитуды h в уравнении Матьё. Добавив в это уравнение слагаемое $2\gamma\dot{x}$, изобразите на диаграмме $h(\omega)$ область неустойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $\omega = 2\omega_0$. Найдите минимальное значение амплитуды h, при котором возникает резонанс. Покажите, что на частоте $\omega = 2\omega_0/n$ это значение пропорционально $\gamma^{1/n}$.

9. Теперь рассмотрим нелинейный параметрический резонанс. Добавим в уравнение Матьё нелинейное слагаемое вида $-\alpha x^3$, трением в этой задаче пренебрежем. Найдите границы устойчивости относительно параметрического резонанса на частоте $2\omega_0$ при различном соотношении параметров. Перейдите к пределу $\alpha \to 0$. К чему приведет учет нелинейных эффектов при рассмотрении резонанса на частотах $\omega = 2\omega_0/n$?

10. В нелинейных системах резонанс наблюдается не только на частотах ω_0/n, как было рассмотрено в задаче 4, но и при $\omega = m\omega_0$, и, значит, на любых частотах вида $m\omega_0/n$ с целыми m и n. Резонанс на частотах $m\omega_0$ отличается от случая ω_0/n и похож на рассмотренный выше параметрический резонанс. Найдите зависимость амплитуды резонансных колебаний от отстройки частоты при резонансе вблизи $\omega = 4\omega_0$, если уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^4 = f\sin\omega t$.